

立正大学『立正経営論集』第43巻第1・2合併号（2011年3月抜刷）

有効フロンティア曲線の双曲線特性 — 2財ポートフォリオの場合 —

高 見 茂 雄

有効フロンティア曲線の双曲線特性

— 2財ポートフォリオの場合 —

高見 茂雄

1. はじめに

本論文の研究動機には2点ある。一つには、2財有効フロンティア曲線は、理論的には双曲線であり、教科書で散見される楕円形状グラフから得られる印象よりもリスク軽減効果は働かないように見える。先行研究は双曲線であることを指摘はするものの、双曲線特性をとらえ議論を進めている文献は調べた範囲内では存在しない。加えて、高見(2010)では、2財の積立証券ポートフォリオでシミュレーションを行ったが、想定していたようなリスク分散効果は得られなかった。そのため、実際のポートフォリオではコーナー解で達成することが多いのではないかとの疑問をもった。そこで、本論文では、2財ポートフォリオの基本に立ち返り、有効フロンティア曲線のもつ双曲線特性を調べ、2点と角度 θ 、曲率 k との関係を明らかにする。リスク尺度として標準偏差を用いるが、空売り制約を設け、大域的リスク最小値とシャープレシオ接点のそれぞれの場合リスク分散効果がどれほど期待できるかを解析し、過去データでリスク軽減の達成確率を求める。

本論文の構成は以下の通りである。第2節では2財ポートフォリオの基礎的考察を行う。第3節では、大域的リスク最小値の達成条件と達成確率を求め、加えて、2点と角度・曲率との関係を明らかにする。第4節では、シャープレシオ接点を調べる。そして、第5節では結論ならびに今後の課題を述べる。

2. 双曲線特性の基礎的考察

2財リスク資産 U, V の1期間リターン確率変数 \tilde{r}_u, \tilde{r}_v で、標準偏差 (> 0) と期待値 ($\in \mathbb{R}$) をそれぞれ $U(\sigma_u, \mu_u)$, $V(\sigma_v, \mu_v)$, 両者の相関係数を ρ とすれば、財 U を w , 財 V を $1-w$ の重み ($w \in \mathbb{R}$) で加重平均した2財ポートフォリオ P の標準偏差, 期待値 (σ_p, μ_p) は, (1)と(2)式で定義できる。

$$\mu_p := E\{w\tilde{r}_u + (1-w)\tilde{r}_v\} = w\mu_u + (1-w)\mu_v \quad (1)$$

$$\sigma_p := \sqrt{\text{Var}\{w\tilde{r}_u + (1-w)\tilde{r}_v\}} = \sqrt{w^2\sigma_u^2 + (1-w)^2\sigma_v^2 + 2\rho w(1-w)\sigma_u\sigma_v} \quad (2)$$

パラメータ w を消去すると, (3)式が得られる。

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{(\mu_u - \mu_v)^2} \left[\{\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_u\sigma_v\} \mu_p^2 + \{\mu_u\sigma_u^2 + \mu_v\sigma_v^2 - \rho(\mu_u + \mu_v)\sigma_u\sigma_v\} \mu_p + \{\mu_u^2\sigma_u^2 + \mu_v^2\sigma_v^2 - 2\rho\mu_u\mu_v\sigma_u\sigma_v\} \right] \quad (3)$$

簡単のため(3)式右辺 μ_p の項別に係数を A, B, C とおき平方完成を行うと, (4)式の通り有効フロンティア曲線を示す点 (σ_p, μ_p) の軌跡は, (σ, μ) 平面上で, 直線 $\mu = B/A$ 上に頂点がある双曲線の $\sigma > 0$ 部分を表している¹。

$$\sigma_p^2 / \left(\sqrt{(AC - B^2)/A} \right)^2 - (\mu_p - B/A)^2 / \left(\sqrt{(AC - B^2)/A^2} \right)^2 = 1 \quad (4)$$

一方, 有効フロンティア曲線を図1のように, 左にふくらむ楕円形状で描いている教科書が散見される。それらは, 2財の標準偏差より低い大域的风险最小値が必ず得られ, シャープレシオが最大になる接点ポートフォリオが必ず定まるとのメッセージを明示的あるいは暗黙的に伝えている。

確かに, 教育的配慮は評価すべきであるが, 正確性に欠く。たとえば, 空売り制約のある場合 ($0 \leq w \leq 1$), パラメータ $U(\sigma_u, \mu_u)$, $V(\sigma_v, \mu_v)$, ρ の値によっては双曲線頂点を表す大域的风险最小値が達成できない場合, あるいは, シャープレシオ接線が引けない場合もある。これらのリスク分散効果が当てはま

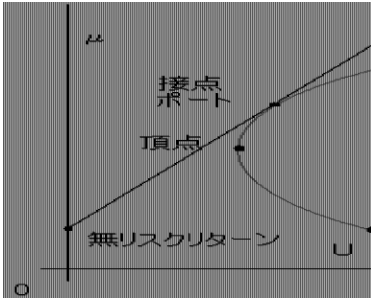


図1 教科書でみられる有効フロンティア曲線

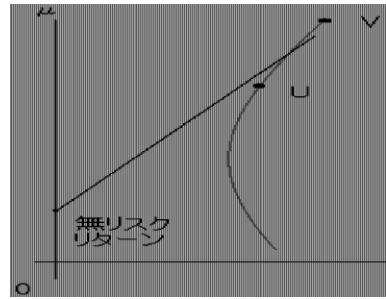


図2 双曲線(接線が引けない場合)

らない事例は、有効フロンティア曲線が双曲線であることを意識すれば、直感的に認識できる。たとえば、図2では、無リスクリターンを起点とする直線を点UからVまで動かしても双曲線と交わり接線は引けない²。

このように、2財ポートフォリオは、大域的风险最小値とシャープレシオ接点ポートフォリオの両面から、教科書が伝えるイメージほどはリスク分散効果が得られないのではないかという疑問が生まれてくる。そこで、本論文では、基本的に立ち返り、空売り制約のある場合リスク軽減効果はどの程度得られるかにつき、双曲線特性を意識して考察する。ところで、Cochran (2005), Bodie et al. (2008), Pennacchi (2008) など多くの資産価格論や2次計画法の文献は、有効フロンティア曲線が双曲線であることを明確に指摘している³。ただし、積極的に双曲線であることを活用して、議論を進めている文献は調べた範囲内では存在しない。そこに、本論文の意義がある。空売り制約を設ける理由は、ポートフォリオ投資の制約には、銘柄数、組入上限下限、リスククラス別比率など多種多様であるが、空売り制約はもっとも自然な制約であると考えからである⁴。以下本論文では、第3節では大域的风险最小値達成可能性を、第4節では接点ポートフォリオ達成可能性を考察する。

3. 大域的风险最小値達成可能性

3.1 大域的风险最小値達成条件

第3節では、2財空売り制約付きモデルで、リスク最小値達成の条件ならびに可能性について考察を進める。準備のため、 $x = \sigma_p$ (5), $y = \mu_p - B/A$ (6), $a = \sqrt{(AC - B^2)/A}$ (7), $b = \sqrt{(AC - B^2)/A^2}$ (8)とおくと、(4)式は (x, y) 平面上の双曲線方程式(9)式で表される。

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1 \quad (9)$$

点 $U(x_u, y_u)$, $V(x_v, y_v)$ は、(9)式が表す双曲線上にあるが、空売り制約条件下、大域的风险最小値である頂点が双曲線の弧に含まれるためには、2点の y 座標の符号が異なることが必要十分であり、 $y_u y_v < 0$ (10)式と同値である。(6)式と(3)式第1, 2項の A, B を用いて整理すると、(11)式に変形できる⁵。

$$\frac{(\mu_u - \mu_v)^2 \sigma_u \sigma_v}{A^2} (\sigma_u - \rho \sigma_v)(\sigma_v - \rho \sigma_u) > 0 \quad (11)$$

最初の係数は常に正なので、 $t = \sigma_v / \sigma_u (> 0)$ とおけば、(12)式と同値である。

$$(1 - \rho t)(t - \rho) > 0 \quad (12)$$

(12)式を観察すると、 $\rho \leq 0$ の場合、 $1 - \rho t \geq 1 > 0$, $t - \rho \leq 0$ となり常に成り立つ。 $\rho > 0$ の場合、(13)式が成り立つので、 (ρ, t) 平面上で達成領域を図示すれば、図3の斜線で囲む領域が該当する。

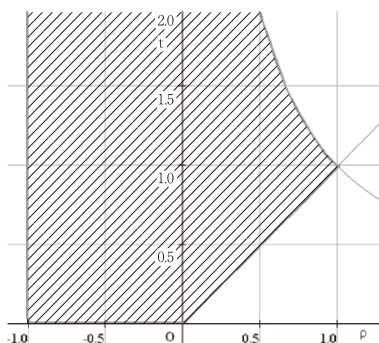


図3 リスク最小値達成領域

$$\rho < t < 1/\rho \quad (13)$$

2点指摘したい。多くの教科書では、 $\rho = -1, 0, 1$ の3通りの有効フロンティア曲線を示し、 $\rho = -1$ の場合はリスクゼロ、 $\rho = 1$ の場合はリスク軽減効果ゼロというメッセージを伝えているのに対し、 $\rho = 0$ の場合は単に中間的な場合としか意味づけていない。ところが、今般考察したところ、 $\rho \leq 0$ の場合、空売り制約付きでもつねにリスク最小値が達成でき、 $\rho = 0$ の場合はその境界であるという積極的な意味をもつ。もう1点は、 $\rho > 0$ の場合、2財の標準偏差の比が大きすぎてもあるいは小さすぎても、空売り制約に抵触し、1に近づくにつれ条件はタイトになる。(13式の不等式について、Bodie et al. (2009, p.202の注3)は、(13式の左側(t の下限)を指摘しているが、右側(t の上限)を指摘している文献は、調べた範囲内では存在しない。しかし、 ρ が1に近いとき、空売り制約の条件がタイトであることは、双曲線状の上限を認識して初めて実感できる。

次に、達成確率を計算する準備として、財 U をマーケットポートフォリオ M とみなして考察を進める。2財の組合せは無限にあるが、1つの財をマーケットポートフォリオに固定し、 $\sigma_u = \sigma_M$ 、 $\tilde{r}_u = \tilde{r}_M$ とおくと、(14式の通り整理される。

$$\beta_v < \min\left(1, \frac{\sigma_v^2}{\sigma_M^2}\right) \quad (14)$$

(14式は、マーケットポートフォリオに手元資金で1つの証券 V を追加する場合、その証券の β が満たす条件を示している。すなわち、 β が1を超える証券はすべて排除され、かつ分散比条件もある。これら条件はタイトであり、大域的风险最小値を追求する投資家にとって、マーケットポートフォリオに別の証券を追加しても、達成する機会は限定的であるとのメッセージを伝えている。

3.2 大域的风险最小値達成可能性

3.2節ではマーケットポートフォリオに TOPIX をとり、実際の過去データを

用いて大域的风险最小値の達成可能性がどの程度かを調べる。東京証券取引所(2008)の『TOPIX β Value (市場第1部版)』Vol.40を現データ(東証1部1,663銘柄の2003年1月末から2007年12月末までの月次リターン平均値, 標準偏差, ベータ値から構成)として用いた。別ソースから求めたこの時期の TOPIX のリターン平均値0.112(年率), 標準偏差0.133(年率)を用いれば, 各銘柄と TOPIX のとの相関係数 ρ が計算できる。表1は1,663銘柄の代表値を示している。

表1 東証1部銘柄リターン代表値

	最小値	第1四分位	中央値	第3四分位	最大値	平均値	標準偏差
β (ベータ)	-0.37	0.69	1.00	1.36	5.51	1.07	0.014
μ (リターン)	-56.97	4.98	12.90	21.94	117.36	14.50	0.394
σ (標準偏差)	0.08	0.24	0.31	0.40	1.66	0.34	0.004
ρ (相関係数)	-0.12	0.33	0.43	0.52	0.79	0.42	0.003

相関係数 ρ に注目すると, 最小値でこそマイナス値を示しているが, 高々-0.1台であり, 第1四分位が0.33と乖離があることから, 図3で示した無条件でリスク最小値を達成する場合はほとんどないことがうかがわれる。(14)式の条件をみたす銘柄数は831銘柄, 達成確率は全体の49.9%であった。この確率値レベルを評価するには, 他の期間や外国株式銘柄などの比較が必要であるが, 少なくとも教科書のグラフから得られるイメージよりは, 小さい確率であると考えられる。

3.3 2財の位置と角度・曲率の関係

3.2節では, リスク最小値の達成確率を考察したが, 2財の y 座標が正であるか負であるのみで判定しており, 双曲線形状を積極的に意識しているとはいえない。本来, 「曲線は曲率によって定まる(小林(1995, p.8))」ので, 双曲線上の2財の位置と角度・曲率との関係を考察する。

まず, (x, y) 平面上の一般的な双曲線(9)式は, $x = a \cosh \theta$ (15), $y = b \sinh \theta$ (16) ($a, b > 0, \theta \in R$) とパラメータ表示できる。角度 θ を頂点 $(a, 0)$ に対応する $\theta = 0$

から正の方向に動かすと、双曲線は右に曲がりつつもその曲がり方は次第に弱まり、漸近線 $y = (a/b)x$ に近づいて行く。反対に負の方向に動かすと、左に曲がりつつも次第に弱まり、漸近線 $y = -(a/b)x$ に近づいて行く。この曲がり方の程度を単位法線ベクトルの倍率として示す計量が曲率 $k(\theta)$ であり、 $k(\theta) = -ab / (a^2 \sinh^2 \theta + b^2 \cosh^2 \theta)^{3/2}$ (17)と表わすことができる。(17)式を θ で微分すると、 $k'(\theta) = -(3/2)ab(a^2 + b^2) / (\sinh 2\theta)^{5/2}$ (18)となり、 θ 全域で負値ではあるが(つねに右に曲がる)、 $\pm\infty$ で0に漸近し、 $\theta = 0$ すなわち頂点 $(a, 0)$ で最小値 $-a/b^2$ をとり、いちばん右に曲がる。

次に、 ρ と双曲線(9)式上の2点 $U(\sigma_u, \mu_u)$ 、 $V(\sigma_v, \mu_v)$ 、そして曲率の関係を調べる。曲率は(19)式の通り変形できる。

$$k(\theta) = -ab / (a^2 \sinh^2 \theta + b^2 \cosh^2 \theta)^{3/2} = -ab / (1 - a^2 + (b^2/a^2)\sigma^2)^{3/2} \quad (19)$$

そこで、(3)式の A 、 B 、 C 項を経由して、(7)、(8)式の a 、 b が決まり、具体的に点 U 、 V に対応する曲率値 $k(\theta_u)$ 、 $k(\theta_v)$ が求まる。 θ_u は対応する μ_u と B/A との位置関係で、(20)式に合致する符号の数値を選ぶ ($\mu_u > B/A$ なら正、 $\mu_u < B/A$ なら負符号)。 $\mu_u = B/A$ の場合は、頂点 $(a, 0)$ に位置する場合に該当し、 $\theta_u = 0$ をとる。 θ_v も同様に(21)式で表現できる⁶。

$$\theta_u = \operatorname{arccosh}(\sigma_u/a) = \pm \log \left((\sigma_u/a) + \sqrt{(\sigma_u/a)^2 - 1} \right) \quad (20)$$

$$\theta_v = \operatorname{arccosh}(\sigma_v/a) = \pm \log \left((\sigma_v/a) + \sqrt{(\sigma_v/a)^2 - 1} \right) \quad (21)$$

ここで、3.2節のデータを用いて、1,663銘柄と対になる TOPIX の角度と曲率 $\theta_M, k(\theta_M)$ は(20)式で $U=M$ とおき、それぞれも銘柄の角度と曲率は(21)式で得られる。また、表1 データで大域的风险最小値を達成する条件(10)式を角度パラメータで表せば(22)式となる。(22)式を用いて、達成確率を計算したところ、50.4%と3.2節とほぼ等しい数値を示すことが確認できた⁷。

$$\theta_v < 0 < \theta_M \quad \text{または} \quad \theta_M < 0 < \theta_v \quad (22)$$

3. 4 曲率・角度情報から双曲線を決定する手法

3. 4節では、見方を変えて、点 U 、曲率、角度を与えた場合、双曲線上の点 V の位置を求める手法を考察する。点 U がどれほど双曲線の頂点に近いか、どれほど瞬間的に曲がる場所に位置しているかを意識する見方である。これまでの考察と対比させれば、3. 3節では、パラメータ $U(\sigma_u, \mu_u)$ 、 $V(\sigma_v, \mu_v)$ 、 ρ を与えて、 $\theta_u, \theta_v, k(\theta_u), k(\theta_v)$ を決定する問題を考えたが、3. 4節では、 $U(\sigma_u, \mu_u)$ 、 $\theta_u, k(\theta_u)$ 、 ρ を与えて、双曲線形状と $V(\sigma_v, \mu_v)$ 、 $\theta_v, k(\theta_v)$ を決定する問題を考察する。

点 $U(\sigma_u, \mu_u)$ を固定し、点 U に対応する曲率と角度 $\theta_u, k(\theta_u)$ を与えると、 (x, y) 平面上では、 $a = \sigma_u / \cosh \theta_u$ (23)、 $b = y_u / \sinh \theta_u$ (24) 式の関係が成り立つ。(23) 式より、双曲線方程式(9)式のパラメータ a は決定できるが、(24) 式では未知数 y_u を含むため、(17) 式の曲率の定義式を用いて未知数 y_u を決定する。すなわち、(17) 式の両辺を 2 乗し、(23)、(24) 式を代入し整理すると y_u^2 に関する 3 次方程式(26) 式が得られる。

$$\left\{ \sigma_u^2 \frac{\sinh^2 \theta_u}{\cosh^2 \theta_u} + y_u^2 \frac{\cosh^2 \theta_u}{\sinh^2 \theta_u} \right\}^3 = \frac{\sigma_u^2 y_u^2}{k(\theta_u)^3 \cosh \theta_u \sinh \theta_u} \quad (25)$$

(25) 式を解くと、正の 2 実根(26)、(27) 式が得られる⁸。ただし、 \arccos は第 2 象限にとる。

$$y_u^2 = -\sigma_u^2 \tanh^4 \theta_u + \frac{2\sigma_u \sinh^2 \theta_u}{\sqrt{3}|k| \cosh^4 \theta_u} \cos\left(\arccos\left(-\sqrt{27}|k|\sigma_u \sinh^2 \theta_u / 2\right) / 3\right) \quad (26)$$

$$y_u^2 = -\sigma_u^2 \tanh^4 \theta_u + \frac{2\sigma_u \sinh^2 \theta_u}{\sqrt{3}|k| \cosh^4 \theta_u} \cos\left(\arccos\left(-\sqrt{27}|k|\sigma_u \sinh^2 \theta_u / 2\right) / 3 - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (27)$$

(26) 式から $y_u^{*1} = \pm \sqrt{y_u^2}$ (28)、(27) 式から、 $y_u^{*2} = \pm \sqrt{y_u^2}$ (29) の合計 4 通りの y_u 値が算出されるが、与えられた角度 θ_u の符号に一致する y_u を選択するため、2 通りの y_u 値にしぼられる。また、(16) 式より b の値も決まり、 (x, y) 平面上の 2 通りの

双曲線方程式(9)式がそれぞれ決定される。一方, (σ, μ) 平面上の双曲線(4)式と(9)式を経由する関係は, $y_u = \mu_u - B/A$ (30)式である。 μ_u 値を固定して考えているので, (28)と(29)式の2通りの y_u 値に対応して, 2通りの B/A 値が定まり, (σ, μ) 平面上でも2通りの双曲線方程式(4)が決定される。

次に, 点 $V(\sigma_v, \mu_v)$ を $U(\sigma_u, \mu_u)$, $\theta_u, k(\theta_u)$, ρ で表すことを考える。 $V(\sigma_v, \mu_v)$ が双曲線上にあるとの条件から,

$$\sigma_v = \cosh \theta_v \sigma_u / \cosh \theta_u \quad (31)$$

$$y_v = \sinh \theta_v y_u / \sinh \theta_u \quad (32)$$

相関係数 ρ を含む関係式を求めるため, $\mu_u = y_u - B/A$ (33), $\mu_v = y_v - B/A$ (34) 式を, (3)式第1項 A と第2項 B を表す式に代入すれば, B/A は消去され, (35)式が得られる。

$$\sigma_u^2 y_v + \sigma_v^2 y_u - \rho \sigma_u \sigma_v (y_u + y_v) = 0 \quad (35)$$

3つの未知数 σ_v, y_v, θ_v は3本の方程式 (31), (32), (35)式で決定できる。まず, y_u, y_v を消去することを目的に, (16), (32)式を用いて(35)式を整理すると, (36)式が得られる。

$$\rho = \frac{\sigma_u^2 / \sinh \theta_u + \sigma_v^2 / \sinh \theta_v}{\sigma_u \sigma_v (1 / \sinh \theta_u + 1 / \sinh \theta_v)} \quad (36)$$

さらに, (31)式を(36)式に代入すると, 分子と分母にある σ_u の係数が払われ, (37)式に整理される。

$$\frac{(1 + \sinh^2 \theta_v)^2}{\cosh^4 \theta_u} + \frac{\sinh^2 \theta_v}{\sinh^2 \theta_u} + \frac{2 \sinh \theta_v (\sinh^2 \theta_v + 1)}{\sinh \theta_u \cosh^2 \theta_u} = \rho^2 \frac{1 + \sinh^2 \theta_v}{\cosh^2 \theta_u} \left(\frac{\sinh \theta_v}{\sinh \theta_u} + 1 \right)^2 \quad (37)$$

(37)式は, $\sinh \theta_v$ に関する4次方程式であるが, 因数 $(\sinh \theta_v + \sinh \theta_u)^2$ で割り整理すると, (38)式の2次方程式が得られる。

$$\left(\rho^2 \cosh^2 \theta_u - \sinh^2 \theta_u \right) \sinh^2 \theta_v - 2 \sinh \theta_u \sinh \theta_v + \rho^2 \cosh^2 \theta_u - 1 = 0 \quad (38)$$

(38)式を $\sinh\theta_v$ について解くと(39)式, それに対応する $\cosh\theta_v$ も(40)式の通り求まる。

$$\sinh\theta_v = \frac{\sinh\theta_u \pm \rho \cosh^2\theta_u \sqrt{1-\rho^2}}{\rho^2 \cosh^2\theta_u - \sinh^2\theta_u} \quad (39)$$

$$\cosh\theta_v = \sqrt{1 + \sinh^2\theta_v} = \frac{\cosh\theta_u \left| \rho \pm \sinh\theta_u \sqrt{1-\rho^2} \right|}{\left| \rho^2 \cosh^2\theta_u - \sinh^2\theta_u \right|} \quad (40)$$

最終的に, 求める点 $V(\sigma_v, \mu_v)$ は, $\sigma_v = a \cosh\theta_v$ (41), $\mu_v = y_v \mu B / A = b \sinh\theta_v \mu B / A$ (42)の関係式に(39), (40)式を代入すれば, 2通りの組合せが求まる。

これまで, (26), (27), (39), (40) のように一見複雑な数式を示して来たが, 数値を直接プラグインでき, 十分実用に耐えられる。現に Excel® を用いて計算可能である。ここで, 3.2節の過去データから得られた1,663通りの $\theta_M, k(\theta_M)$ を出発点に, $\theta_v, k(\theta_v)$ がそれぞれ2通り, 合計3,326通りの組合せ (θ_M, θ_v) のデータが得られるが, (22)式を用いて, 大域的リスク最小値達成確率を実際に計算したところ, 56.1%と3.2節の49.9%とは異なる。これは, マーケットポートフォリオ M で同じ曲率値をとる対になるシャドー証券というべき仮想証券を想定し, 同じ形状の双曲線を2通りカウントしているからである。

4. 接点ポートフォリオ達成可能性

4.1 2財の位置から接点を決定する方法

4.1節では, 点 $V(\sigma_v, \mu_v)$, $U(\sigma_u, \mu_u)$ と相関係数 ρ を与え, 接点 $T(\sigma_T, \mu_T)$ ならびに, そこでの曲率 $k(\theta_T)$ と角度 θ_T を求める。リスクフリーレート f ($0 < f < A/B$) (43) の範囲に固定する⁹。

まず, シャープレシオを表す直線は, リスク回避度を a とし, $\mu = a\sigma + f$ (44) 式で定義できる。続いて, $g = f - B/A$ (45) とおき, (x, y) 平面で表すと(46)式で

表される。

$$y = \sigma x + g \quad (46)$$

一方、双曲線方程式(9)式を x について微分すると、(47)式が得られる。

$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (47)$$

接線が直線(46)の傾きに等しいという条件 $y' = \sigma$ (48)より、整理して(49)式が得られる。

$$y(y - g) = b^2 x^2 / a^2 \quad (49)$$

ところが、(49)式を満たす点 (x, y) は双曲線上にあるので、双曲線の方程式(9)式から得られる $x^2 = a^2(y^2/b^2 + 1)$ (50)を(49)式右辺に代入すれば、 $-yg = b^2$ (51)式が得られる。そして、最終的に(45)式より、接点の座標を表す(52)、(53)式が得られる。

$$\mu_T = -b^2 / (f - B/A) \quad (52)$$

$$\sigma_T = x = a \sqrt{\frac{b^2}{(f - B/A)^2} + 1} \quad (53)$$

曲率 $k(\theta_T)$ と角度 θ_T は、(20)式に準じて、(53)式の値を代入すれば求まる。双曲線方程式(9)式のパラメータ a, b は、(23)、(24)式から直ちに決定される。そして、空売り制限の下、シャープレシオ接点が達成できる条件は、角度パラメータ θ を用い (54)式で表すことができる。

$$0 < \theta_T < \theta_v \quad \text{または} \quad \max(0, \theta_v) < \theta_T < \theta_u \quad (54)$$

(54)式の θ_u を TOPIX のパラメータ θ_M とみなし、達成確率を計算したところ、大域的风险最小値達成確率の50.4%よりは大きい61.0%であった。3. 2節でも述べたように、確率値の大小評価は更なる分析を要するが、少なくとも、図2の

ように内分点では接線が引けない場合が約40%はあることを示している。

4.2 曲率と角度情報から接点を決定する方法

4.2節でも3.4節に対応して、曲率・角度情報から双曲線を決定する手法を用い、(54)式条件で接点ポートフォリオ達成確率を求める。ここでは、結果のみを記載するが、4.1節の61.0%に対し64.2%であった。数値が異なるのは、3.4節で論じたように、対になるシャドー証券を想定し、同じ形状の双曲線を2通りカウントしているためである。

5. 結論

本論文は、2財有効フロンティア曲線は双曲線であることを意識し、空売り制限の下、リスク分散効果がどれほど期待できるかを分析した。まず、双曲線方程式で大域的リスク最小値を達成する不等式条件を求めたが、2財の相関係数が正の場合はタイトであること、過去データでの達成確率は約50%であることを示した。また、接点ポートフォリオ達成確率も61.0%にとどまる。次に、角度と曲率のパラメータで有効フロンティア曲線を表すと、対になるシャドー証券を想定でき、2倍のクラスで大域的リスク最小値達成確率は56.1%、接点ポートフォリオ達成確率は64.2%と計算できた。これら、リスク分散効果のレベルを評価するには、他の期間や銘柄のデータとの比較を行う必要があるものの、少なくとも教科書で散見される印象よりは、小さいと評価できる。

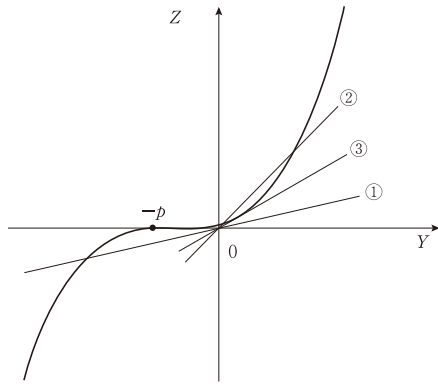
本論文の特徴は、角度・曲率パラメータを用いた双曲線を意識した分析にあるが、そのファイナンス面での意義は、1証券を固定した上で有効フロンティア曲線を想定、その曲線上にもう一つの証券があるかを探索するという考え方にある。2財の場合には、その意義は十分に顕在化しているとはいえないが、発展的に n 財の場合を想定すれば、積極的な意味をもつと考えられる。 n 財の有効フロンティ

ア曲線では容易に接線が引けるとは考えられない。そこで、2次計画法で求めた大域的风险最小値(頂点)を固定し、そこから有効フロンティア曲線と接点ポートフォリオ点候補を探索する方法が考えられる。このテーマを今後の課題として発展させて行きたい。

【数学付録】 3次方程式 $(Y+p)^3=qY$ ($p, q > 0$) の正の実根の考察

まず、3次方程式 $(Y+p)^3=qY$ (A1) の根の配置を (Y, Z) 平面グラフ上で図示すれば、図A1の通りである。 $(Z=(Y+p)^3$ 曲線 (A2) を太線、原点を通る $Z=qY$ 直線 (A3) のうち、①~③の場合を図示する)。

$Y=-p$ でY軸と接する3次曲線 (A2) と原点を通る直線 (A3) との交点のY座標が方程式 (A1) の根を与えるが、直線①のように、第1象限で (A2) 曲線と交わらない場合は、1つの負の実根と、2つの共役複素根をもつ。この場合は正の根は得られない。次に、②のように第1象限でも (A2) 曲線と交わる場合は、2つの正の根と1つの負の根を持つ。ただし、③の接する場合は正の重根と1つの負の根に該当する。



図A1 3次曲線の配置

一方、方程式(A1)をカルダノの公式を適用し解くと、複素数の範囲で、(A4)

~(A6) の3つの根で表現できる。ただし、
$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$Y = -p + \sqrt[3]{(q/2)\{-p + \sqrt{p^2 - 4q/27}\}} + \sqrt[3]{(q/2)\{-p - \sqrt{p^2 - 4q/27}\}} \quad (\text{A } 4)$$

$$Y = -p + \sqrt[3]{(q/2)\{-p + \sqrt{p^2 - 4q/27}\}} \omega + \sqrt[3]{(q/2)\{-p - \sqrt{p^2 - 4q/27}\}} \omega^2 \quad (\text{A } 5)$$

$$Y = -p + \sqrt[3]{(q/2)\{-p + \sqrt{p^2 - 4q/27}\}} \omega^2 + \sqrt[3]{(q/2)\{-p - \sqrt{p^2 - 4q/27}\}} \omega \quad (\text{A } 6)$$

直線が①の場合は、平方根 $\sqrt{p^2 - 4q/27}$ の中が正で、(A 4) 式が負の実根、(A 5), (A 6) 式は共役複素根になる。この場合は求める正の実根は得られない。これに対し、直線が②の場合は、平方根 $\sqrt{p^2 - 4q/27}$ の中が負になる場合である。(A 4)~(A 6) の第2項と第3項に含まれる部分を(A 7) 式の極形式で表す。

$$-p \pm \sqrt{4q/27 - p^2} i = \sqrt{4q/27} (\cos \varphi \pm i \sin \varphi) \quad (\text{A } 7)$$

$$\left(\cos \varphi = -\sqrt{\frac{27p^2}{4q}}, \sin \varphi = \sqrt{1 - \frac{27p^2}{4q}}, \frac{\pi}{2} < \varphi < \pi \right)$$

(A 4) 式は (A 8) と変形できる。

$$\begin{aligned} Y &= -p + \sqrt[3]{q/2} \sqrt[6]{4q/27} \{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{1/3} + (\cos \varphi - i \sin \varphi)^{1/3}\} \\ &= -p + 2\sqrt[3]{q/3} \cos(\varphi/3) \end{aligned} \quad (\text{A } 8)$$

(A 8) の右辺の符号を調べる。(A 7) 式左辺の平方根 > 0 の条件から、 $\sqrt{q/3} > 3p/2$ (A 9)。(A 9) の関係を (A 8) に用いれば、(A 10) 不等式が成り立つ。よって、正の実根をもつ。なお、 $\pi/6 < \varphi/3 < \pi/3$ より、 $\inf(\cos(\varphi/3)) = 1/2$ の関係を用いている。

$$Y > -p + 2(3p/2) \cos(\varphi/3) > -p + 3p(1/2) = p/2 > 0 \quad (\text{A } 10)$$

次に、(A 5) 式は (A 11) 式に変形できるが、 $\cos \varphi/3, \sin \varphi/3 > 0$ につき、す

すべての項の符号が負になり、求める根ではない。

$$\begin{aligned}
 Y &= -p + \sqrt[3]{q/2} \sqrt[6]{4q/27} \left\{ (\cos\varphi + i \sin\varphi)^{1/3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right. \\
 &= + (\cos\varphi - i \sin\varphi)^{1/3} \left. \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= -p + 2\sqrt{q/3} \left\{ \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) - i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= -p + 2\sqrt{q/3} \cos \left(\frac{\varphi + 2\pi}{3} \right) = -p + \sqrt{q/3} \left\{ -\cos \frac{\varphi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\varphi}{3} \right\} \quad (\text{A11})
 \end{aligned}$$

最後に、(A5) 式は (A12) 式に変形でき、 $\cos \left(\frac{\varphi - 2\pi}{3} \right) = \frac{-1}{2} \cos \frac{\varphi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{\varphi}{3}$

と展開した $\sin \frac{\varphi}{3}$ の項が正なので、求める正の実根の候補にはなりうる。

$$\begin{aligned}
 Y &= -p + \sqrt[3]{q/2} \sqrt[6]{4q/27} \left\{ (\cos\varphi + i \sin\varphi)^{1/3} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right. \\
 &= + (\cos\varphi - i \sin\varphi)^{1/3} \left. \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= -p + \sqrt{q/3} \left\{ \cos \left(\frac{\varphi - 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi - 2\pi}{3} \right) + \cos \left(\frac{-\varphi + 2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{-\varphi + 2\pi}{3} \right) \right\} \\
 &= -p + 2\sqrt{q/3} \cos \left(\frac{\varphi - 2\pi}{3} \right) \quad (\text{A12})
 \end{aligned}$$

ところで、(A7) の定義 $\cos\varphi = -\sqrt{\frac{27p^2}{4q}}$ から (A13) 式の p, φ の関係式が得られる。

$$p = \frac{-2\sqrt{q} \cos\varphi}{3\sqrt{3}} \quad (\text{A13})$$

(A13) 式を (A12) 式に代入すると、(A14) 式の通り値域 $\pi/2 < \varphi < \pi$ の範囲で φ の関数で表される。

$$Y = 2\sqrt{q/3} \left\{ \frac{\cos\varphi}{3} + \cos \left(\frac{\varphi - 2\pi}{3} \right) \right\} \quad (\text{A14})$$

(A14) 式を微分すると (A15) 式となって定義域の範囲で、単調減少関数であることが確認できる。

$$\frac{dY}{d\varphi} = -2\sqrt{q/3} \left\{ \frac{\sin\varphi}{3} + \frac{\sin\left(\frac{\varphi-2\pi}{3}\right)}{3} \right\} < 0 \quad (\text{A15})$$

(A14) に $\arg \inf(Y) = \pi/2$ を代入すると、 $\text{Inf}(Y) = 0$ につき、(A12) 式は正の実根をもつ。

まとめると、直線②の場合は、 φ を第 2 象限の角度をとり、(A16)、(A17) 式の正の 2 実根を持つ。

$$Y = -p + 2\sqrt{q/3} \cos \left(\arccos \left(-\sqrt{\frac{27p^2}{4q}} \right) / 3 \right) \quad (\text{A16})$$

$$Y = -p + 2\sqrt{q/3} \cos \left(\arccos \left(-\sqrt{\frac{27p^2}{4q}} \right) / 3 - \frac{2\pi}{3} \right) \quad (\text{A17})$$

最後に直線が双曲線と接する③の場合は、正の重根を持ち、共役な (A5)、(A6) 式が同型の (A18) 式で表される。

$$Y = -p + \sqrt[3]{(-pq/2)}\omega + \sqrt[3]{(-pq/2)}\omega^2 \quad (\text{A18})$$

(A18) を変形すると (A19) 式となり、求める正の実根の候補になる。

$$\begin{aligned} Y &= -p + \sqrt[3]{(-pq/2)} \left\{ \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right\} + \left\{ \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \right\} \\ &= -p + 2\sqrt[3]{(-pq/2)} \cos \frac{2\pi}{3} = -p + \sqrt[3]{(pq/2)} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

ところが、直線③の場合は (A5)、(A6) 式の平方根の中がゼロなので、 $p^2 - 4q/27 = 0$ (A20)。これより、 $q = 27p^2/4$ (A21)。(A21) 式を (A19) 式に代入すると、(A22) 式の通り正の重根であることが確認できる。

$$Y = -p + 3p/2 = p/2 > 0 \quad (\text{A22})$$

ただし、(A22) の場合は、(A16) の下限、(A17) 式の上限の値を表すので、総括して、3次方程式 $(Y + p)^3 = qY$ ($p, q > 0$) の正の実根は、(A16) と (A17) 式で表すことができる

【参考文献】

- ・ Bodie, Zvi, A. Kane and A. J. Marcus (2009) “Investments eighth ed,” McGrawHill.
- ・ Branke, J., B. Schechenbach, M. Stein, K. Deb and H. Schmeck (2009) “Portfolio Optimization with an Envelop-Based Multi-Objective Evolutionary Algorithm,” *European Journal of Operational Research*, Vol.199, 684–693.
- ・ Cochrane, John H. (2005) “Asset Pricing revised ed.,” Princeton University Press.
- ・ Pennacchi, George (2008) “Theory of Asset Pricing,” Pearson/ Addison Wesley.
- ・ Qi, Yue, M. Hirschberger and R. E. Steuer (2009) “Dotted Representation of Mean-Variance Efficient Frontiers and their Computation,” *Infor Journal*, Vol.47, No.1, 15–21.
- ・ 小林昭七 (1995) 『曲線と曲面の微分幾何 (改訂版)』 裳華房.
- ・ 高見茂雄 (2010) 「積立証券ポートフォリオ投資のリスクとリターン評価」『立正経営論集』第42巻第1・2合併号, 35–63.
- ・ 東京証券取引所 (2008) 『TOPIX β Value (市場第1部版)』 Vol.40.
- ・ 津野義道 (1991) 『ポートフォリオ選択論入門』 共立出版.

【注】

- 1 (4)式の平方根のなかで、 $A > 0$ であることは、 $\sigma_u^2 + \sigma_v^2 - 2\rho\sigma_u\sigma_v = (\sigma_u - \sigma_v)^2 + 2(1-\rho)\sigma_u\sigma_v > 0$ で確認できる。一方、 $AC - B^2$ の符号も $AC - B^2 = (1-\rho^2)\sigma_u^2\sigma_v^2 / (\mu_u - \mu_v)^2 > 0$ と、これも正にて、 $\sqrt{(AC - B^2)/A}$ と $\sqrt{(AC - B^2)/A^2}$ はいずれも実数値をとり、(4)式は双曲線の方程式として有効である。
- 2 Cochran (2005, p.81) は、接線が引けるためには、リスクフリーレート値は双曲線の2本の漸近線の交点以下でならないことを指摘している。
- 3 Pennacchi (2008) は、はじめ (σ^2, μ) 平面で放物線であることを示し、その後 (σ, μ) 平面で双曲線と説明している点がユニークである。

- ⁴ Pennacchi (2008, p.41 の注 13) は、空売りポジションは通常の投信では認められておらず、ETF 投信であれば、空売りは可能と説明している。しかし、空売りポジションでは追加的な取引コストが発生するため、空売り制約がない場合と同列に議論するのは現実的ではない。また、Branke et al. (2009, p.685) は、ミューチュアルファンドで実際に課している代表的制約として、空売り制約に加え、組入証券銘柄総数、特定証券の構成比、購入単位を上げている。
- ⁵ (1)式において、 $w = 1$ の場合 $\mu_p = \mu_u$ 、 $w = 0$ の場合 $\mu_p = \mu_v$ の値をとり、それらを(6)に代入している。
- ⁶ (20)式の平方根の中の値 $(\sigma_u/a)^2 - 1$ を計算すると、 $(\sigma_u/a)^2 - 1 = (\sigma_u - \rho\sigma_v)^2 / (1 - \rho^2)\sigma_v^2 > 0$ 。また、 $\sigma_u/a > 0$ 。よって、 θ_u は実数値をとる。(21)式も同様である。
- ⁷ 3.2 節の数値 49.9% と一致しないのは、データの中に $\beta = 1$ の数値が含まれ、それに対応する $\theta_M = 0$ は計算上とれないことによる。
- ⁸ 【数学付録】で (A16)、(A17) 式に対応する。
- ⁹ (43)式で、リスクフリーレート値が双曲線頂点の μ 座標より下方に位置するという条件は、シャープレシオを表す直線がリスク回避的の性向をもつためには、傾きが正で双曲線と接しなければならないからである。